4.2 Das bestimmte Integral

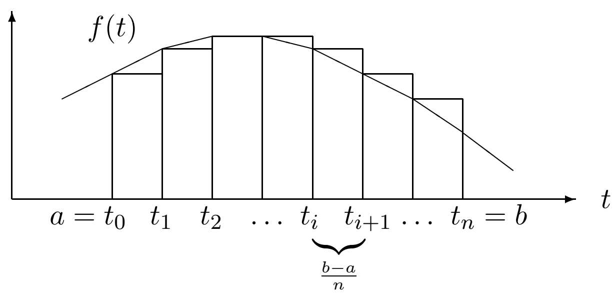
Die geometrische Interpretation eines bestimmten Integrals ist die Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(t)$. Man zerlege ein Interval $[a, b]$ auf der t-Achse äquidistant in n Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \ , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dann approximiere man den Flächeninhalt durch die Flächen der durch die Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, 0)$$

gegebenen Rechtecke (mit der Breite $\frac{b-a}{n}$):



Die Summe der n Rechteckflächen ist $\dfrac{b-a}{n} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)$. Im Grenzwert $n \to \infty$ liefert dies die Fläche unter dem Graphen.

Definition 4.26: (Das bestimmte Integral)

Zu einer über dem Intervall $[a, b]$ definierten (hinreichend glatten, z.B. stetigen) Funktion $f(t)$ (dem **„Integranden“***) wird das* **„bestimmte Integral“** *über $[a, b]$ definiert als*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

(sofern dieser Grenzwert existiert).

Dies ist lediglich eine prinzipielle Definition, die zur Berechnung völlig ungeeignet ist. Die wirkliche Berechnung geschieht über Stammfunktionen von $f(t)$, sobald der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem unbestimmten Integral geklärt ist (nächster Abschnitt).

Bemerkung 4.27: *Das bestimmte Integral kann auch negative Werte annehmen (z.B., wenn überall $f(t) < 0$ gilt). Die Interpretation als „Fläche unter dem Graphen“ gilt nur für positive Funktionen.*

Bestimmte Integrale können additiv zerlegt werden. Man stelle sich dazu eine positive Funktion $f(t)$ vor, d.h., das Integral von a bis b ist die Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = b$. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = c$ und der Fläche von $t = c$ bis $t = b$, wobei der Zerlegungspunkt c beliebig gewählt werden kann:

Satz 4.28: (Zerlegung bestimmter Integrale)

Für beliebiges a, b, c gilt:

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Konvention 4.29:

Wir setzen

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\;dt,$$

womit wir in $\int_a^b f(t)\;dt$ nun auch $b < a$ zulassen können. Speziell gilt

$$\int_a^a f(t)\,dt = -\int_a^a f(t)\;dt = 0.$$

Mit dieser Konvention gilt Satz 4.28 auch für Zerlegungspunkte c, die außerhalb des Intervalls $[a, b]$ liegen.

Bemerkung 4.30: *In MuPAD ist die Funktion* `int` *sowohl für bestimmte als auch für unbestimmte Integrale zuständig:*

```
>> int(exp(-2*x), x)
                                  1
                           - ---------
                                      2
                             2 exp(x)

>> int(exp(-2*t), t = 0..5)
                                   1
                         1/2 - ---------
                                        2
                               2 exp(5)

>> float(%)
                             0.4999773
```

Bemerkung 4.31: *Man beachte, daß das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ eine Funktion in x ist, während das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ für konkrete Zahlenwerte a, b einen Zahlenwert darstellt. Diesen kann man numerisch approximieren, indem man z.B. die in der Definition 4.26 gegebene Summe für großes n ausrechnet. Alternativ zur „Riemann-Summe"*

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

ist es günstiger, stattdessen die „Trapez-Summe"

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} \; + \; \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\Big) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

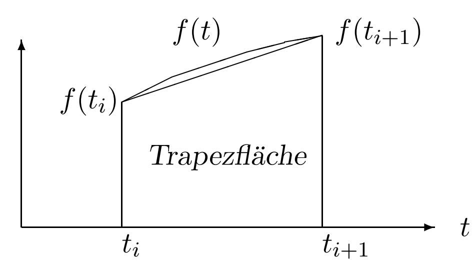
zu berechnen, die sich mit $t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ auch als

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2}$$

schreiben läßt. Hierbei ist $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2}$ die Fläche des durch die 4 Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_{i+1})), \quad (t_{i+1}, 0)$$

definierten Trapezes (d.h., die Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ wird nicht durch Rechtecke, sondern durch Trapeze angenähert).



Bemerkung 4.32: *In MuPAD ist die Funktion `numeric::int` für die numerische Berechnung von bestimmten Integralen zuständig. Sie arbeitet auch dann, wenn der symbolische Integrator kein Ergebnis liefert (weil er keine Stammfunktion findet):* $\boxed{\downarrow 12.6.01}$

```
>> int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                    1/2       1/2
               int(t     exp(t    ), t = 0..10)

>> numeric::int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                         264.1573027
```

4.3 Der Hauptsatz: Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

Es verbleibt das Problem, wie man effektiv bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ohne den garstigen Grenzwert von Riemann–Summen berechnen kann. Hier kommt die wesentliche Beobachtung ins Spiel, daß man mit unbestimmten Integralen (Stammfunktionen) bestimmte Integrale ausrechnen kann.

Satz 4.33: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 1)

Betrachte

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Für stetiges f ist F_a differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x),$$

d.h., $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

„Beweisidee“: Es gilt

$$\Delta F_a = F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \stackrel{(4.28)}{=} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Nähern wir auf dem (kleinen) Interval $[x, x+h]$ die Funktion durch den konstanten Wert $f(t) \approx f(x)$ an, so gilt

$$\Delta F_a = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx \int_x^{x+h} f(x)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot n = \lim_{n\to\infty} h \cdot f(x) = h \cdot f(x).$$

Damit läßt sich die Ableitung von $F_a(x)$ berechnen:

$$\frac{d}{dx}F_a(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(x)}{h} = f(x).$$

□

Bemerkung 4.34: *Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt. Dies wird in der Darstellung einer Stammfunktion über* $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *dadurch deutlich, daß die untere Grenze* a *beliebig wählbar ist. Die Konstante ist hier durch die Bedingung* $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ *festgelegt. Bei unterschiedlicher Wahl der unteren Grenze ist die Differenz der entsprechenden Stammfunktionen in der Tat eine Konstante:*

$$F_{a_1}(x) - F_{a_2}(x) = \int_{a_1}^{x} f(t)\,dt - \int_{a_2}^{x} f(t)\,dt$$

$$\stackrel{(4.28)}{=} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \int_{a_2}^{x} f(t)\,dt\right) - \int_{a_2}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt.}_{\text{unabhängig von } x}$$

Bestimmte Integrale sind also Stammfunktionen, wenn man sie als Funktion der oberen Grenze auffaßt. Umgekehrt, kennt man ein Stammfunktion, so liefert sie ein bestimmtes Integral, denn alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, d.h., es muss gelten

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Es verbleibt nur, die Integrationskonstante c zu identifizieren. Für $x = a$ folgt

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a),$$

also

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Dies liefert nun eine effektive Methode, bestimmte Integrale auszurechnen, indem man sich zunächst eine Stammfunktion des Integranden verschafft:

Satz 4.35: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 2)
Sei $F(x)$ *eine beliebige Stammfunktion von* $f(x)$*. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Die additive Konstante der Stammfunktion fällt dabei bei Differenzbildung heraus.

Beispiel 4.36: Zur Berechnung von $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ berechnet man zunächst eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Analog zu Beispiel 4.11 ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c.$$

Mit der Stammfunktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$ ergibt sich das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \ln(t)\,dt = F(2) - F(1) = \Big(2 \cdot \ln(2) - 2 + c\Big) - \Big(1 \cdot \ln(1) - 1 + c\Big) = 2 \cdot \ln(2) - 1.$$

Bemerkung 4.37: *Aus dem Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral folgt sofort, daß die Rechenregeln aus Abschnitt 4.1 auch für bestimmte Integrale gelten, z.B. (Satz 4.7):*

$$\boxed{\int_a^b \Big(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\Big)dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt \;+\; c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt.}$$

Partielle Integration gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = [f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b} \;-\; \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt,}$$

wobei $[f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b}$ *als Abkürzung für*

$$[f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b} = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

dient. Substitution gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.}$$

Beispiel 4.38: Partielle Integration:

$$\int_0^1 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\,dt = [\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\,dt$$

$$= [t \cdot \sin(t)]_{t=0}^{t=1} - [-\cos(t)]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 1 \cdot \sin(1) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(1) - \cos(0) = \sin(1) + \cos(1) - 1.$$

Beispiel 4.39: Substitution $y = t^2$, $dy = 2\,t\,dt$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\,\cos(t^2)\;dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos(t^2)\cdot\underbrace{2\,t\,dt}_{dy} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}\cos(y)\;dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\sin(y)]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2}\cdot\Big(\sin(\pi)-\sin(0)\Big) = 0.$$

Man beachte hierbei, wie sich im Substitutionsschritt die Grenzen ändern: Für $t = 0$ folgt $y = t^2 = 0$, für $t = \sqrt{\pi}$ folgt $y = t^2 = \pi$.

Beispiel 4.40: Sei $p(x)$ eine Nachfrage(Preis-Absatz)-Funktion einer Ware, $x =$ die nachgefragte Menge, $p =$ der Preis. Die Erlösfunktion ist $E(x) = p(x)\cdot x$. Sei $p_0 = p(x_0)$ der aktuelle Preis, für den die Ware angeboten wird, x_0 der aktuelle Absatz („Gleichgewicht“).

Wie groß wäre der (fiktive) Gesamterlös E^*, wenn man erreichen könnte, daß jeder Konsument den für ihn gerade noch akzeptablen Preis zahlt[1]? (Hierbei werden nur die Konsumenten betrachtet, die mindestens p_0 zu zahlen bereit sind). Wir setzen $p(x)$ als monoton fallend voraus, damit entsprechen Preise $p \geq p_0$ einem Absatz $0 \leq x \leq x_0$. Der Bereich $[0, x_0]$ wird in n gleiche Teile aufgeteilt. Es würden jeweils $\frac{x_0}{n}$ Konsumenten den Preis $p(\frac{i}{n}\cdot x_0)$ zahlen. Insgesamt würde dies zum Gesamterlös

$$E^* \approx \frac{x_0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p\Big(\frac{i}{n}\cdot x_0\Big)$$

führen. Dies ist eine Riemann–Summe im Sinne von Definition 4.26. Im Grenzwert $n\to\infty$ liefert dies als Formel für den fiktiven Erlös

$$E^* = \int_0^{x_0} p(x)\,dx.$$

Der tatsächliche Erlös ist $E_0 = x_0\cdot p_0$. Man definiert

$$K_R(x_0) = E^* - E_0 = \int_0^{x_0} p(x)\;dx - x_0\cdot p_0 = \int_0^{x_0}(p(x)-p_0)\;dx$$

als die **Konsumentenrente** mit der folgenden Interpretation: Sie ist der Gesamtersparnis aller Konsumenten, die bereit gewesen wären, mehr als $p_0 = p(x_0)$ für die Ware auszugeben, aber aufgrund des aktuellen Marktpreises p_0 „billiger“ an die Ware kommen. Für monoton fallendes $p(x)$ gilt $p(x) \geq p(x_0)$ für $x \leq x_0$, damit ist diese Rente

[1]Zum Beispiel kann man beim Einführen eines neuen Produktes den Markt „von oben abschöpfen“ (das sehen wir momentan bei neuen PC-Generationen): Zunächst wird das neue Modell zu einem hohen Preis angeboten, bis diejenigen Käufer, die hohe Preise zu zahlen bereit sind, gesättigt sind. Danach fällt der Preis ein wenig, bis sich die nächste Käuferschicht eingedeckt hat. Usw.

positiv. Beispiel: die Nachfrage sei durch die Modellfunktion $p(x) = e^{-x}$ gegeben, der aktuelle Absatz sei $x_0 = 1$. Die Konsumentenrente ist

$$K_R(1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx - 1\cdot e^{-1} = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} - e^{-1}$$
$$= -e^{-1} + e^0 - e^{-1} = 1 - 2\cdot e^{-1} \approx 0.2642.$$

4.4 Uneigentliche Integrale

15.6.01↓

Bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\;dt$ sind zunächst nur für endliche Intervalle $[a, b]$ definiert. Wir erweitern die Definition:

Definition 4.41: (Uneigentliche Integrale)

$$\int_a^\infty f(t)\;dt = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\;dt,$$
$$\int_{-\infty}^b f(t)\;dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)\;dt,$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\;dt = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\;dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 4.42:

$$\int_0^\infty e^{-t}\;dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\;dt = \lim_{b\to\infty}[-e^{-t}]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

Beispiel 4.43: Substitution $y = -\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}} = \frac{1}{2\cdot y}$, $dt = 2\cdot y\cdot dy$:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\;dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{-\infty} e^y\cdot 2\cdot y\;dy \overset{(4.29)}{=} -\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\;dy.$$

Man achte hierbei auf die Transformation der Grenzen: $t = 0$ entspricht $y = -\sqrt{t} = 0$, $t = \infty$ entspricht $y = -\sqrt{t} = -\infty$. Das verbleibende Integral war bereits in Beispiel 4.12 gelöst worden:

$$-\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\;dy = -\lim_{a\to-\infty}[(y-1)\cdot e^y]_{y=a}^{y=0}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\Big(-1-(a-1)\cdot e^a\Big) = 1-\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big).$$

Der verbleibende Grenzwert ist 0:

$$\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big) \overset{(b=-a)}{=} \lim_{b\to\infty}\Big((1+b)\cdot e^{-b}\Big) = \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{b+1}{e^b}\Big).$$

Da mit $e^b = 1+b+\frac{b^2}{2}+\cdots$ die Exponentialfunktion für $b\to\infty$ stärker steigt als jedes Polynom, ist der Grenzwert 0. Endergebnis:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = 1.$$

Man geht ähnlich vor, wenn der Integrand eine Singularität hat:

Definition 4.44: (Uneigentliche Integrale bei singulären Integranden)

Hat der Integrand $f(t)$ an der Stelle a oder b eine Singularität, so definiert man

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_a^{b-\epsilon} f(t)\,dt,$$

bzw.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(t)\,dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 4.45: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\Big[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big]_{t=\epsilon}^{t=1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+0}[2\cdot\sqrt{t}]_{t=\epsilon}^{t=1} = 2\cdot\lim_{\epsilon\to 0+0}\Big(1-\sqrt{\epsilon}\Big) = 2.$$

Beispiel 4.46: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral nicht (bzw. ist ∞):

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+0}[\ln(t)]_{t=\epsilon}^{t=1} = \lim_{\epsilon\to 0+0}\Big(0-\ln(\epsilon)\Big) = \infty.$$
