Ü b u n g s b l a t t 12

Lösungen von $*$-Aufgaben sind per Web-Formular unter `http://math-www.upb.de/~walter` ($\longrightarrow$ Lehre SS 05 $\longrightarrow$ Übungen) bis spätestens Do, 7.7.05, abzuliefern.
Lösungen von $**$-Aufgaben sind schriftlich abzugeben. Sie werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 6.7.05 eingesammelt.

Aufgabe 80:** (Taylor-Reihen. 10 Bonuspunkte)
Diese Aufgabe kann schriftlich bearbeitet werden. Bearbeitungen werden zu Beginn der Vorlesung am Mi, 6.7.05, eingesammelt.

Bestimme die ersten 4 Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$ der Taylor-Entwicklung

$$e^{\sin(x)} = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + O(x^4).$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. MuPAD-Funktion zur Kontrolle: `taylor, series`.

Musterlösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = e^{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = e^{\sin(0)} = 1,\\
&f^{(1)}(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1,\\
&f^{(2)}(x) = -\sin(x) \cdot e^{\sin(x)} + \cos^2(x) \cdot e^{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 1,\\
&f^{(3)}(x) = -\cos(x) \cdot e^{\sin(x)} - 3 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{\sin(x)} + \cos^3(x) \cdot e^{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Beginn der Taylor–Entwicklung

$$e^{\sin(x)} = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + O(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Probe mit MuPAD:

```
>> series(exp(sin(x)), x= 0)

                2    4    5
               x    x    x        6
     1 + x + -- - -- - -- + O(x )
               2    8   15
```

Aufgabe 81*: (Taylor-Reihen. 10 Bonuspunkte)
Seien M_1, M_2, M_3 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Bestimme die ersten 3 Koeffizienten c_0, c_1 , c_2 der Taylor-Entwicklung von

$$f(x) = \frac{e^{M_1 \cdot x}}{M_2 - M_3 \cdot x} = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Siehe auch Aufgabe 80.

Musterlösung:
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \frac{e^{M_1\cdot x}}{M_2 - M_3\cdot x} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = \frac{e^0}{M_2} = \frac{1}{M_2},\\
f^{(1)}(x) &= \frac{M_1\cdot e^{M_1\cdot x}\cdot(M_2 - M_3\cdot x) + M_3\cdot e^{M_1\cdot x}}{(M_2 - M_3\cdot x)^2} = \frac{M_1\cdot M_2 - M_1\cdot M_3\cdot x + M_3}{(M_2 - M_3\cdot x)^2}\cdot e^{M_1\cdot x}\\
&\Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \frac{M_1\cdot M_2 + M_3}{M_2^2},\\
f^{(2)}(x) &= \frac{M_3\cdot(M_1\cdot M_2 + 2\cdot M_3 - M_1\cdot M_3\cdot x)}{(M_2 - M_3\cdot x)^3}\cdot e^{M_1\cdot x} + \frac{M_1\cdot M_2 - M_1\cdot M_3\cdot x + M_3}{(M_2 - M_3\cdot x)^2}\cdot M_1\cdot e^{M_1\cdot x}\\
&\Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = \frac{M_1\cdot M_2\cdot M_3 + 2\cdot M_3^2}{M_2^3} + \frac{M_1^2\cdot M_2 + M_1\cdot M_3}{M_2^2}\\
&\qquad = \frac{2\cdot M_1\cdot M_2\cdot M_3 + 2\cdot M_3^2 + M_1^2\cdot M_2^2}{M_2^3}.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Beginn der Taylor–Entwicklung

$$
\frac{e^{M_1\cdot x}}{M_2 - M_3\cdot x} = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 + O(x^3)
$$

$$
= \underbrace{\frac{1}{M_2}}_{c_0} + \underbrace{\frac{M_1\cdot M_2 + M_3}{M_2^2}}_{c_1}\cdot x + \underbrace{\frac{M_1^2\cdot M_2^2 + 2\cdot M_3^2 + 2\cdot M_1\cdot M_2\cdot M_3}{2\cdot M_2^3}}_{c_2}\cdot x^2 + O(x^3).
$$

Probe mit MuPAD:

```
>> series(exp(M1*x)/(M2  - M3*x), x = 0, 3)

                            /    2     2          \
   1     / M1    M3 \    2 |  M1    M3    M1 M3 |       3
  -- + x | -- + --- | + x  | ---- + --- + ----- | + O(x )
  M2     | M2     2 |      | 2 M2     3     2   |
         \      M2  /      \          M2    M2  /
```

Aufgabe 82: (Taylor-Reihen)

Betrachte $f(x) = 1/(1-x)$.
a) Bestimme eine Formel für $f^{(n)}(x)$.
b) Bestimme hiermit die Taylor–Reihe von f um den Nullpunkt.
c) Für welche x wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?

Musterlösung:
a) Die ersten Ableitungen:

$$
f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x},\ f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},\ f^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}
$$

legen die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

nahe, welche durch Induktion leicht zu beweisen ist. Hier der Induktionsschritt:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\, f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\, \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = -(n+1) \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+2}} \cdot (-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

b) Mit $f^{(n)}(0) = n!/(1-0)^{n+1} = n!$ ergibt sich die Taylor–Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

c) Es ist bekannt, dass die geometrische Reihe für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert und für $|x| \geq 1$ divergiert:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

Aufgabe 83: (Taylor-Reihen)

Betrachte $f(x) = \arctan(x)$.

a) Bestimme die Taylor-Reihe von $f'(x)$ um den Nullpunkt.

b) Für welche x wird $f'(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt?

c) Stelle eine Vermutung auf, wie die Taylor-Reihe von $f(x)$ aussieht.

Anleitung: a) Die Konstruktion über Ableitungen ist mühsam. Betrachte stattdessen eine geeignete geometrische Reihe. c) Integration von $f'(x)$ und der Taylor-Reihe von $f'(x)$. (Integration als Vorkenntnisse aus der Schule vorausgesetzt).

Musterlösung:

a) In Aufgabe 74.b) wurde

$$\frac{d}{dx}\, \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

hergeleitet. Mit $\epsilon = -x^2$ gilt

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2\cdot k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

b) Dies ist die Taylor–Reihe um den Nullpunkt. Als geometrische Reihe konvergiert sie für $|-x^2| < 1$, also $|x| < 1$, gegen $f'(x) = 1/(1+x^2)$.

c) Integriert man die Gleichung

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

formal links und rechts, so erhält man

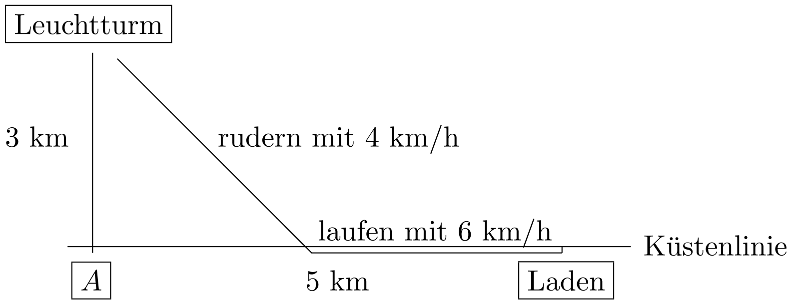
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots + \text{Konstante}.$$

Die Konstante ergibt sich durch Einsetzen von $x = 0$ mit $f(0) = \arctan(0) = 0$ als 0. Dies ergibt als (vermutete) Taylor-Reihe

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots.$$

Aufgabe 84: (Extremwerte)

Ein Leuchtturm liegt 3 km vor der Küste, direkt gegenüber einem Punkt A der geraden Küstenlinie. Vom Punkt A aus liegt in 5 km Entfernung parallel zur Küstenlinie ein Laden. Der Leuchtturmwärter kann mit 4 km/h rudern und mit 6 km/h laufen. Welchen Punkt sollte er vom Leuchtturm aus startend ansteuern, um den Laden so schnell wie möglich zu erreichen?



MuPAD-Funktionen zur Kontrolle: `diff, solve`.

Musterlösung:

Sei x der Abstand zwischen A und dem Küstenpunkt, der rudernd anzusteuern ist. Nach Pythagoras ist die zu rudernde Strecke $\sqrt{3^2 + x^2}$, die zum Rudern benötigte Zeit ist damit

$$t_1 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4}.$$

Es verbleibt die Strecke $5 - x$ zu laufen, die dafür benötigte Zeit ist

$$t_2 = \frac{5 - x}{6}.$$

Damit ist das Minimum von

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{5 - x}{6}$$

zu finden:

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{2 \cdot x}{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4 \cdot \sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{9 + x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 9 \cdot x^2 = 4 \cdot (9 + x^2) \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2.683.$$

Aufgabe 85*: (Extremwerte. 10 Bonuspunkte)

Seien M_1, M_2 Zahlen (die von `hex` zufällig gewählt werden). Betrachte einen Quader, bei dem die Seiten a, b der Grundfläche das Verhältnis $a/b = M_1$ aufweisen. Bestimme die Höhe c des Quaders, wenn das Volumen

$$a \cdot b \cdot c = M_2$$

gegeben ist und die Quaderoberfläche minimal werden soll.

Musterlösung:

Die Oberfläche ist

$$F = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c,$$

wobei

$$a = M_1 \cdot b$$

und

$$a \cdot b \cdot c = M_2$$

gilt, also

$$b = \frac{M_2}{a \cdot c} \quad \Rightarrow \quad a = M_1 \cdot b = \frac{M_1 \cdot M_2}{a \cdot c} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{M_1 \cdot M_2}{c} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{M_1 \cdot M_2}{c}}$$

und

$$b = \frac{a}{M_1} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1 \cdot c}}\,.$$

Damit ergibt sich die Oberfläche als Funktion von c:

$$F(c) = 2 \cdot a(c) \cdot b(c) + 2 \cdot \Big(a(c) + b(c)\Big) \cdot c$$

$$= 2 \cdot \frac{M_2}{c} + 2 \cdot c \cdot \left(\sqrt{\frac{M_1 \cdot M_2}{c}} + \sqrt{\frac{M_2}{M_1 \cdot c}}\right) = 2 \cdot \frac{M_2}{c} + 2 \cdot \sqrt{c} \cdot \left(\sqrt{M_1 \cdot M_2} + \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right).$$

Sei

$$M_3 = \sqrt{M_1 \cdot M_2} + \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{M_1 \cdot M_2} \cdot \Big(1 + \frac{1}{M_1}\Big).$$

Das Oberflächenminimum ergibt sich durch

$$0 = \frac{d}{dc}\, F(c) = -\frac{2 \cdot M_2}{c^2} + \frac{M_3}{\sqrt{c}} \quad \Rightarrow \quad c^{3/2} = \frac{2 \cdot M_2}{M_3} \quad \Rightarrow \quad c = \Big(\frac{2 \cdot M_2}{M_3}\Big)^{2/3},$$

also

$$c = \left(\frac{4 \cdot M_2^2}{M_3^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot M_2^2}{M_1 \cdot M_2 \cdot \Big(1 + \frac{1}{M_1}\Big)^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot M_2}{M_1 + 2 + \frac{1}{M_1}}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{4 \cdot M_1 \cdot M_2}{M_1^2 + 2 * M_1 + 1}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot M_1 \cdot M_2}{(M_1 + 1)^2}\right)^{1/3}.$$
