Ü b u n g s b l a t t 15 (Wiederholung)

Folgende Aufgaben dienen zur Wiederholung und Klausurvorbereitung.

Aufgabe 103: (Komplexe Zahlen. Induktion.)
Beweise formal: $(1+i)^{2\cdot n} = (-1)^{n/2}\cdot 2^n$ für alle $n \in \{0,2,4,\cdots\}$.

Musterlösung:
Vorüberlegung:

$$(1+i)^2 = 1 + 2\cdot i + i^2 = 1 + 2\cdot i - 1 = 2\cdot i.$$

Es folgt

$$(1+i)^{2\cdot n} = ((1+i)^2)^n = (2\cdot i)^n = 2^n \cdot i^n.$$

Damit bleibt zu zeigen:

$$i^n = (-1)^{n/2}, \quad \text{für } n = 0,2,4,\ldots.$$

Diese Behauptung wird durch Induktion nach n gezeigt. Induktionsstart $n = 0$:

$$i^0 = 1 = (-1)^0 \quad \text{(ok)}.$$

Induktionsschritt $n \to n+2$. Es gelte $i^n = (-1)^{n/2}$ für ein gerades n (Induktionsvoraussetzung). Damit folgt

$$i^{n+2} = i^n \cdot i^2 = -i^n = -(-1)^{n/2} = (-1)^{n/2+1} = (-1)^{(n+2)/2}.$$

Dies ist die behauptete Gleichung für $n+2$.

Aufgabe 104: (Polynome. Induktion.)
Sei $p(z) = z^n + c_{n-1}\cdot z^{n-1} + \cdots + c_0$ ein Polynom vom Grad n mit den (eventuell übereinstimmenden) Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Beweise formal:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -c_{n-1}.$$

Musterlösung:
Nach dem Hauptsatz der Algebra gilt

$$z^n + c_{n-1}\cdot z^{n-1} + \cdots + c_0 = (z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n).$$

Wir zeigen per Induktion nach n, dass in der Expansion von

$$(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$$

der Koeffizient vor z^{n-1} durch $-(z_1+\cdots+z_n)$ gegeben ist.
Start: $n = 1$, $p(z) = z + c_0$. Die Nullstelle ist $z_1 = -c_0$. Ok.
Schritt $n \to n+1$: Es gelte (Induktionsvoraussetzung)

$$(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n) = z^n - (z_1+\cdots+z_n)\cdot z^{n-1} + \cdots.$$

Damit folgt:

$$(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)\cdot(z-z_{n+1})$$

$$= (z^n - (z_1 + \cdots + z_n) \cdot z^{n-1} + \cdots) \cdot (z - z_{n+1})$$
$$= \Big(z^{n+1} - (z_1 + \cdots + z_n) \cdot z^n + (..) \cdot z^{n-1} + \cdots \Big) - \Big(z^n \cdot z_{n+1} + z^{n-1} \cdot z_{n+1} + \cdots \Big)$$
$$= z^{n+1} - (z_1 + \cdots + z_{n+1}) \cdot z^n + (..) \cdot z^{n-1} + \cdots.$$

Dies ist die zu beweisende Aussage für $n+1$.

Aufgabe 105: (Funktionalkalkül für Matrizen)

Bestimme eine explizite Form der Matrixpotenz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

Musterlösung:
Diagonalisierung von A: die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - x \cdot 1) = x^2 + 1$, also $x = \pm i$. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x_1 = i, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x_1 = -i.$$

Die Diagonalisierung ist damit

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{T^{-1}}.$$

Potenzen von A haben damit die Darstellung

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{pmatrix}}_{D^n} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{T^{-1}}.$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + (-1)^n) \cdot i^n & ((-1)^n - 1) \cdot i^{n+1} \\ (1 - (-1)^n) \cdot i^{n+1} & (1 + (-1)^n) \cdot i^n \end{pmatrix}.$$

Endergebnis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } n = 0 \bmod 4, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 1 \bmod 4,$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ für } n = 2 \bmod 4, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 3 \bmod 4.$$

Aufgabe 106: (Folgen, Grenzwerte)

Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin(n) \cdot n}{n^2 + 1}$.

Musterlösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)\cdot n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{\sin(n)}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(n)}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Da $|\sin(n)| \leq 1$ beschränkt ist, gilt

$$\left|\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(n)}{1+\frac{1}{n^2}}\right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Dies ist offensichtlich eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\Big) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)\cdot n}{n^2+1} = 0.$$

Aufgabe 107: (Folgen, Grenzwerte)

Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{e^n}{2^n} + 1\right)$.

Musterlösung:

Mit $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{e^n}{2^n}+1\right) &= \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{e^n}{2^n} \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{e}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\ln(e^n) - \ln(2^n) + \ln\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)\right)\\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(n - n\cdot\ln(2) + \ln\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)\right) = 1 - \ln(2) + \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Da $(2/e)^n$ eine Nullfolge ist (beachte $0 \leq 2/e < 1$), strebt der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{e^n}{2^n}+1\right) = 1 - \ln(2).$$

Aufgabe 108: (Folgen, O-Kalkül)

Sei $x_n = \dfrac{n^3 + n\cdot O(n)}{2\cdot n^3 + \frac{O(n^3)}{n+1}}$. Bestimme den Grenzwert der Folge (x_n).

Musterlösung:

$$x_n = \frac{n^3 + n\cdot O(n)}{2\cdot n^3 + \dfrac{O(n^3)}{n+1}} = \frac{n^3}{2\cdot n^3} \cdot \frac{1 + \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{O(n)}{n}}{1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{O(n^3)}{n^3}}.$$

Da $\frac{O(n)}{n}$ und $\frac{O(n^3)}{n^3}$ beschränkt sind, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{O(n)}{n}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{O(n^3)}{n^3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{O(n)}{n}}{1 + \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{O(n^3)}{n^3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 109: (Reihen)

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} \cdot x^k$.

Musterlösung:
Der gesuchte Konvergenzradius ist $r = 1$. Für $|x| < 1$ liefert das Wurzelkriterium

$$\left(\frac{k+1}{k+2} \cdot |x|^k\right)^{1/k} \leq (|x|^k)^{1/k} = |x| < 1$$

die Konvergenz. Für $|x| > 1$ bilden die Summanden keine Nullfolge, denn

$$\frac{k+1}{k+2} \cdot |x|^k \geq \frac{|x|^k}{2} > \frac{1}{2},$$

die Reihe divergiert also. Alternativ über die Cauchy-Hadamard-Formel für $\sum_k a_k \cdot (x - x_0)^k$:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{|a_k|}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{1/k} = \frac{\lim_{k\to\infty} (k+2)^{1/k}}{\lim_{k\to\infty} (k+2)^{1/k}} = \frac{1}{1} = 1,$$

wo die (bekannte) Tatsache $\lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$ eingeht.

Aufgabe 110: (Reihen)

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3 + k^2}$?

Musterlösung:
Majorante: für alle $k = 2, 3, \ldots$ gilt

$$\frac{\ln(k)}{k^3 + k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Begründung:

$$\frac{\ln(k)}{k^3 + k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(k) \leq \frac{k^3 + k^2}{k^2} = k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq e^{k+1} = 1 + (k+1) + \frac{(k+1)^2}{2!} + \cdots.$$

Damit ist $\sum_k \frac{1}{k^2}$ eine (bekannterweise konvergierende) Majorante.

Aufgabe 111: (Reihen, Partialbruchzerlegung)

Berechne den Reihenwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+2)}$.

Musterlösung:
Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{k\cdot(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a\cdot(k+2)+b\cdot k}{k\cdot(k+2)} = \frac{(a+b)\cdot k + 2\cdot a}{k\cdot(k+2)}$$

$$\Rightarrow \quad a+b=0, \quad 2\cdot a = 2 \quad \Rightarrow \quad a=1, \quad b=-1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big) - \Big(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big)\\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n\to\infty$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\cdot(k+2)} = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 112: (Stetigkeit)
Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4} & \text{für } x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0\end{cases}$$

am Punkt $x=0$ stetig ist.

Musterlösung:
Für $x\neq 0$ gilt

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1-(1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}\mp\cdots)}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}\pm\cdots}{x^4} = \frac{1}{2!}-\frac{x^4}{4!}\pm\cdots.$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2},$$

d.h., mit dem Wert $f(0)=\frac{1}{2}$ ist die Funktion am Nullpunkt stetig.

Aufgabe 113: (Grenzwerte)
Bestimme $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

Musterlösung:
de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\,(x-1)}{\frac{d}{dx}\,\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 1} x = 1.$$

Aufgabe 114: (O-Kalkül)

Zeige formal: $e^{1+x} = e + O(x)$ im Limes $x \to 0$.

Musterlösung:
Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{e^{1+x} - e}{x}$$

auf einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt ist. Mit

$$e^{1+x} - e = e^1 \cdot e^x - e = e \cdot (e^x - 1)$$

und

$$e^x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = x \cdot \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)$$

folgt

$$f(x) := \frac{e^{1+x} - e}{x} = e \cdot \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right).$$

Diese Funktion ist für $|x| \leq 1$ beschränkt:

$$|f(x)| \leq e \cdot \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \cdots\right) \leq e \cdot \left(1 + |x| + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots\right) = e \cdot e^{|x|} \leq e^2.$$

Aufgabe 115: (O-Kalkül)

Zeige formal: $\sqrt{|x|} \cdot O(x) = o(x)$ im Limes $x \to 0$.

Musterlösung:
Sei $f(x)$ eine beliebige Funktion mit $f(x) = O(x)$, d.h., $f(x)/x$ ist auf einer Umgebung U von $x = 0$ beschränkt, also

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq C \quad \text{für alle } x \in U.$$

Zu zeigen ist, dass $g(x) := \sqrt{x} \cdot f(x) = o(x)$ gilt, also, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|} \cdot f(x)}{x} = 0$$

gilt. Dies folgt aber mittels

$$\left|\frac{\sqrt{|x|} \cdot f(x)}{x}\right| \leq \sqrt{|x|} \cdot C.$$

Aufgabe 116: (Spezielle Funktionen)
Bestimme $\sin(\frac{\pi}{3})$ und $\cos(\frac{\pi}{3})$ als explizite exakte Ausdrücke. Anleitung: betrachte

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

für ein geeignetes x.

Musterlösung:
Für $x = \frac{\pi}{6}$ folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Mit

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(\frac{\pi}{3}\right)$$

folgt

$$1 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) > 0$ folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 117: (Komplexe Wurzeln)
Bestimme alle komplexen Lösungen von $z^3 = -1$ in kartesischer Darstellung. Beachte Aufgabe 116.

Musterlösung:
Die Polardarstellung von -1 ist $-1 = e^{i \cdot \pi}$. Die drei Wurzeln sind damit

$$z_k = e^{i \cdot (\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Die Polarwinkel $\arg(z_k)$ sind

$$\arg(z_0) = \frac{\pi}{3}, \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot \pi}{3} = \pi, \quad \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{4 \cdot \pi}{3} = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{3}.$$

Mit $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Aufgabe 116) ergeben sich die kartesische Darstellungen

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{2},$$

$$z_1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1,$$

$$z_2 = \cos\left(2 \cdot \pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(2 \cdot \pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Aufgabe 118: (Differentiation, Implizite Funktionen)
Die Funktion $y = f(x)$ sei implizit als Lösung der Gleichung

$$y + y^3 = x^2 + x^4$$

definiert. Bestimme alle Extrema von $f(x)$ und identifiziere sie als Minimum oder Maximum.

Musterlösung:
Durch Differenzieren von

$$f(x) + f(x)^3 = x^2 + x^4$$

erhält man eine Gleichung für $f'(x)$:

$$f'(x) + 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) = 2 \cdot x + 4 \cdot x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{2 \cdot x + 4 \cdot x^3}{1 + 3 \cdot f(x)^2}.$$

Durch weiteres Differenzieren erhält man

$$f''(x) = \frac{2 + 12 \cdot x^2}{1 + 3 \cdot f(x)^2} - \frac{(2 \cdot x + 4 \cdot x^3) \cdot 6 \cdot f(x) \cdot f'(x)}{(1 + 3 \cdot f(x)^2)^2}. \qquad (\#)$$

Mit der Forderung $f'(x) = 0$ ergibt sich für die Extremstelle(n) von f die Gleichung

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x + 4 \cdot x^3}{1 + 3 \cdot f(x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (2 + 4 \cdot x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Das einzige mögliche Extremum liegt also bei $x = 0$. Um es als Minimum/Maximum zu identifizieren, ist das Vorzeichen von $f''(0)$ zu ermitteln:
Zu $x = 0$ ist $y = 0$ die einzige Lösung von $y + y^3 = x^2 + x^4 = 0$, also $f(0) = 0$. Einsetzen von $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ in (#) liefert

$$f''(0) = 2.$$

Damit ist $x = 0$ ein Minimum.

Aufgabe 119: (Taylor-Entwicklung)
Sei $T_2(x)$ das quadratische Taylor–Polynom der Funktion $f(x) = \ln(\cos(x))$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
a) Bestimme $T_2(x)$.
b) Zeige, dass $|f(x) - T_2(x)| \leq \dfrac{2 \cdot |x|^3}{3}$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ gilt.

Musterlösung:
a) Mit $f(0) = \ln(1) = 0$,

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{d}{dx} \tan(x) = -1 - \tan^2(x) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$

ist das quadratische Taylor–Polynom:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = -\frac{x^2}{2}$$

b) Für das Restglied der Taylor–Entwicklung gilt

$$f(x) - T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot x^3$$

mit einem Zwischenpunkt $\xi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Man berechnet

$$f'''(x) = -2 \cdot \tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x)).$$

Es folgt

$$|f(x) - T_2(x)| = \frac{|-2 \cdot \tan(\xi) \cdot (1 + \tan^2(\xi))|}{3!} \cdot |x|^3 \le \frac{2 \cdot |\tan(\xi)| \cdot (1 + \tan^2(\xi))|}{3!} \cdot |x|^3.$$

Für $|\xi| \le \frac{\pi}{4}$ gilt $|\tan(\xi)| \le 1$ und damit

$$|f(x) - T_2(x)| \le \frac{2 \cdot 1 \cdot (1 + 1^2)}{3!} \cdot |x|^3 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot |x|^3 = \frac{2 \cdot |x|^3}{3}.$$

Aufgabe 120: (Differentiation, Extremwerte)
Welche Punkte des Parabelbogens $y = 2 - x^2$ haben den kleinsten Abstand zum Ursprung? Wie groß ist dieser minimale Abstand?

Musterlösung:
Der Abstand eines Punktes (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$ ist $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mit $y = 2 - x^2$ ist d oder (einfacher)

$$d^2 = x^2 + (2 - x^2)^2 = 4 - 3 \cdot x^2 + x^4 := f(x)$$

zu minimieren:

$$f'(x) = -6 \cdot x + 4 \cdot x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Mit

$$f''(x) = -6 + 12 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -6, \quad f''\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big) = f''\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big) = -6 + 12 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

ist $x = 0$ ein lokales Maximum und $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sind die gesuchten lokalen Minima. Der Minimalabstand ist

$$\sqrt{f\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big)} = \sqrt{4 - 3 \cdot \frac{3}{2} + \Big(\frac{3}{2}\Big)^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3228... \,.$$

Aufgabe 121: (Differentiation, de l'Hospital)

Bestimme $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$. Anleitung: betrachte den Logarithmus des Ausdrucks.

Musterlösung:
de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = e^1 = e.$$

Aufgabe 122: (Unbestimmte Integration)

Bestimme $\displaystyle\int \frac{2\cdot x\cdot \ln(x)}{(x^2-1)^2}\,dx$. Anleitung: zunächst partielle Integration.

Musterlösung:
Partielle Integration:

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{2\cdot x}{(x^2-1)^2}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)}_{g(x)}\,dx$$

$$= \frac{\ln(x)}{1-x^2} + \int \frac{1}{x\cdot(x^2-1)}\,dx.$$

Das verbleibende Integral ist durch Partialbruchzerlegung zu berechnen:

$$\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a\cdot(x^2-1) + b\cdot x\cdot(x+1) + c\cdot x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$= \frac{a\cdot x^2 - a + b\cdot x^2 + b\cdot x + c\cdot x^2 - c\cdot x}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{(a+b+c)\cdot x^2 + (b-c)\cdot x - a}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$\Rightarrow \quad a+b+c=0, \quad b-c=0, \quad -a=1 \quad \Rightarrow \quad a=-1, \quad b=c=\frac{1}{2}.$$

Also:

$$\int \frac{1}{x\cdot(x^2-1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\ln(|x|) + \frac{\ln(|x-1|)}{2} + \frac{\ln(|x+1|)}{2} + c.$$

Endergebnis:

$$\int \frac{2\cdot x\cdot\ln(x)}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{\ln(x)}{1-x^2} - \ln(|x|) + \frac{\ln(|x-1|)}{2} + \frac{\ln(|x+1|)}{2} + c.$$

Aufgabe 123: (Bestimmte Integration)

Berechne $\displaystyle\int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2}\; dt.$

Musterlösung:
Setze $y = 1 - t^2$, $dy/dt = -2 \cdot t$, $dt = -\frac{dy}{2}$. Mit $t = 0 \Rightarrow y = 1$, $t = 1 \Rightarrow y = 0$:

$$\int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2}\; dt = -\int_1^0 \frac{\sqrt{y}}{2}\; dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 y^{1/2} dy = \frac{1}{2} \cdot \Big[\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 124: (Uneigentliche Integrale)

Bestimme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt.$

Musterlösung:
Zunächst die Stammfunktion von $\frac{\ln(t)}{t^2}$. Substituiere $y = \ln(t)$, $dy/dt = \frac{1}{t}$, $dy = dy/t$:

$$\int \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt = \int \frac{\ln(t)}{t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{y}{t}\; dy = \int \frac{y}{e^y}\; dy = \int y \cdot e^{-y}\; dy.$$

Partielle Integration:

$$\int \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g'(y)}\; dy = \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)} - \int \underbrace{1}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y})}_{g(y)}\; dy = -y \cdot e^{-y} + \int e^{-y}\; dy = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt = -\ln(t) \cdot e^{-\ln(t)} - e^{-\ln(t)} + c = -\frac{\ln(t)}{e^{\ln(t)}} - \frac{1}{e^{\ln(t)}} + c = -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + c.$$

Es folgt

$$\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt = \lim_{b\to\infty} \Big[-\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} \Big]_{t=1}^{t=b}$$
$$= \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\ln(1)}{1} + \frac{1}{1} \Big).$$

Mit $\ln(1) = 0$, $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0$ und

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b)}{b} \overset{(c=\ln(b))}{=} \lim_{c\to\infty} \frac{c}{e^c} = 0$$

folgt:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\; dt = 1.$$
