Mathe für Physiker III — Walter Oevel — Wintersemester 02/03 — 27. 1. 2003

Übungsblatt 12

Abgabe von $*$ Aufgaben bis zum 3.2., 11^{oo} Uhr, im Zettelkasten auf dem D1.

Aufgabe 52*: (Komplexe Differenzierbarkeit. 3 + 3 + 3 Bonuspunkte)
An welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen $f_1(z) = 1/z$, $f_2(z) = \overline{z}$ (komplexe Konjugation) und $f_3(z) = |z|$ (komplexer Betrag) komplex differenzierbar? Anleitung: Wo sind die Cauchy–Riemannschen DGLen für diese Funktionen erfüllt?

Musterlösung:
a) Mit $z = x + i \cdot y$ folgt die Zerlegung von $f_1(z) = 1/z$ nach Real- und Imaginärteil:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i \cdot y} = \frac{x - i \cdot y}{(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y)} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

Mit

$$u_x = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2 \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_x = \frac{2 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

sind die Cauchy–Riemannschen DGLen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ offensichtlich überall (außer an der Polstelle $z = 0$) erfüllt.

b) Mit $\overline{z} = \overline{x + i \cdot y} = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$, also

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = -1$$

sind die Cauchy–Riemannschen DGLen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ offensichtlich nirgends erfüllt.

c) Mit $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, also $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = 0$, also

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq v_y = 0, \quad u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq -v_x = 0$$

sind die Cauchy–Riemannschen DGLen nirgends (außer evtl. am Nullpunkt) erfüllt. Am Nullpunkt ergibt sich der Differenzenquotient

$$\frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

dessen Grenzwert für $h \to 0$ nicht existiert. Damit ist $f_3(z) = |z|$ nirgends differenzierbar.

Aufgabe 53*: (Der komplexe Logarithmus. 3 + 3 + 3 Bonuspunkte)
Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ läßt sich in der Form $z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$ schreiben, wobei mit den Vereinbarungen $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi]$ die Polarkoordinaten (r, ϕ) eindeutig sind. Definiere den komplexen Logarithmus durch

$$\ln(z) := \ln(r) + i \cdot \phi,$$

wobei $\ln(r)$ der wohlbekannte reelle Logarithmus ist.

a) Zeige: $e^{\ln(z)} = z$. Gilt immer $\ln(e^z) = z$?

b) Wo ist der komplexe Logarithmus stetig?

c) Zeige, dass der Logarithmus an allen Stellen $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ differenzierbar ist. (Mit $\mathbb{R}_-$ ist die negative reelle Halbachse $\{z = x + i \cdot y;\ x \le 0,\ y = 0\}$ gemeint.) Bestimme die Ableitung des Logarithmus.

Musterlösung:
a) Es gilt immer

$$e^{\ln(z)} = e^{\ln(r)+i\cdot\phi} = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\cdot\phi} = r \cdot e^{i\cdot\phi} = z.$$

Da der ln nur Werte liefert, deren Imaginärteil (= der Polarwinkel ϕ) zwischen $-\pi$ und π liegt, kann für z außerhalb dieses Streifens nicht $z = \ln(e^z)$ gelten. In der Tat gilt

$$z = \ln(e^z) + i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi \quad \text{mit} \quad k = \left\lceil \frac{\Im(z) - \pi}{2 \cdot \pi} \right\rceil \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

b) Der Realteil $\Re(\ln(z)) = \ln(|z|)$ ist überall außer am Nullpunkt eine stetige Funktion, da der reelle Logarithmus für positive Argumete stetig ist und nur $|z| > 0$ betrachtet wird.
Der Imaginärteil $\Im(\ln(z)) = \phi$ ist als Polarwinkel (geometrisch anschaulich) ebenfalls stetig, solange z nicht auf der negativen reellen Halbachse liegt. Dort springt der Polarwinkel von den Werten $\approx \pi$ (für $\Im(z) \ge 0$) zu Werten $\approx -\pi$ (für $\Im(z) < 0$), wenn man diese Halbachse transversal von der oberen Halbebene in die untere Halbebene laufend überschreitet. Der Stetigkeitsbereich von $\ln(z)$ ist damit $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

c) Mit $x = \Re(z) = r \cdot \cos(\phi)$, $y = \Im(z) = r \cdot \sin(\phi)$ folgen aus den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y},$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

die partiellen Ableitung

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\phi), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\phi), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos(\phi)}{r}$$

der Polarkoordinaten nach den kartesischen Koordinaten (vergleiche auch Beispiel 2.29 des Skripts). Für die Zerlegung des komplexen Logarithmus $\ln(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ in

$$u(x, y) = \ln(r), \quad v(x, y) = \phi$$

lassen sich damit sofort die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ verifizieren:

$$u_x = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos(\phi)}{r}, \quad u_y = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sin(\phi)}{r}, \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi)}{r}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos(\phi)}{r}.$$

Mit der Kettenregel der Differentiation folgt

$$e^{\ln(z)} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz}\, e^{\ln(z)} = \underbrace{e^{\ln(z)}}_{z} \cdot \frac{d}{dz}\, \ln(z) = \frac{d}{dz}\, z = 1,$$

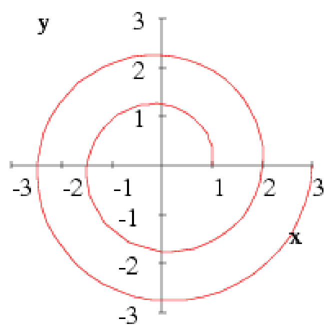
also (wie im Reellen): $\boxed{\frac{d}{dz}\, \ln(z) = \frac{1}{z}}$.

Aufgabe 54*: (Kurvenparametrisierungen. 3 + 3 + 3 Bonuspunkte)

a) Finde eine Parametrisierung der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ mit den Halbachsen $a > 0$, $b > 0$.

b) Finde eine Parametrisierung des Funktionsgraphen $y = f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$.

c) Finde eine Parametrisierung der folgenden Spirale vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt $(3, 0)$:



Zur Probe: Kurven können in MuPAD mit `plot(plot::Curve2d([x(t),y(t)],t=t0..t1))` gezeichnet werden.

Musterlösung:
a) Die Ellipsengleichung wird mit $\frac{x}{a} = \cos(\phi)$, $\frac{y}{b} = \sin(\phi)$ erfüllt, also

$$x(\phi) = a \cdot \cos(\phi), \quad y(\phi) = b \cdot \sin(\phi), \quad \phi \in [0, 2 \cdot \pi).$$

b) $x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [x_0, x_1]$.

c) Die Spirale wurde mittels

```
>> t0:= 0: t1:= 2:
>> r:= t -> 1 + t: x:= t -> r(t)*cos(2*PI*t): y:= t -> r(t)*sin(2*PI*t):
>> plot(plot::Curve2d([x(t), y(t)], t = t0 .. t1),
        Ticks = [[-3, -2, -1, 1, 2, 3], [-3, -2, -1, 1, 2, 3]],
        Scaling = Constrained, FontSize = 16):
```

erzeugt. Die verwendete Parametrisierung ist damit

$$t \in [0, 2] \to z(t) = (1 + t) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t}.$$

(Der lineare Anstieg des Radius $r(t) = 1 + t$ ist aus dem Plot natürlich nicht wirklich ersichtlich. Beliebige monoton steigende Funktionen $r(t)$ mit $r(0) = 1$ und $r(2) = 3$ erzeugen ähnliche Spiralen.)

Aufgabe 55*: (Kurvenintegrale. 5 + 5 Bonuspunkte)

Berechne $\int_{0\,\Gamma}^{z} \xi \, d\xi$, wobei

a) Γ die Gerade vom Nullpunkt zum Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist,

b) Γ der Parabelbogen $y = \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot x^2$ vom Nullpunkt zum Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist (es gelte $\Re(z) \neq 0$).

Musterlösung:
a) Mit der Parametrisierung $\xi(t) = t \cdot z$, $t \in [0,1]$ ergibt sich

$$\int_{\Gamma\, 0}^{z} \xi \, d\xi = \int_0^1 \underbrace{t \cdot z}_{\xi(t)} \cdot \underbrace{z}_{\frac{d\xi(t)}{dt}} dt = z^2 \cdot \int_0^1 t \, dt = \frac{z^2}{2}.$$

b) Mit der Parametrisierung

$$\xi(t) = t + i \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^2, \quad t \in [0, \Re(z)]$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\, 0}^{z} \xi \, d\xi &= \int_0^{\Re(z)} \underbrace{\left(t + i \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^2\right)}_{\xi(t)} \cdot \underbrace{\left(1 + 2 \cdot i \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t\right)}_{\frac{d\xi(t)}{dt}} dt \\
&= \int_0^{\Re(z)} \left(t - 2 \cdot \frac{\Im(z)^2}{\Re(z)^4} \cdot t^3 + i \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^2 + i \cdot 2 \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^2\right) dt \\
&= \int_0^{\Re(z)} \left(t - 2 \cdot \frac{\Im(z)^2}{\Re(z)^4} \cdot t^3 + i \cdot 3 \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^2\right) dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{\Im(z)^2}{\Re(z)^4} \cdot \frac{t^4}{2} + i \cdot \frac{\Im(z)}{\Re(z)^2} \cdot t^3 \right]_{t=0}^{t=\Re(z)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\Re(z)^2 - \Im(z)^2 + 2 \cdot i \cdot \Re(z) \cdot \Im(z)\right) = \frac{(\Re(z) + i \cdot \Im(z))^2}{2} = \frac{z^2}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 56*: (Stammfunktionen. 5 + 5 Bonuspunkte)
Sei $f(z)$ differenzierbar. Sei z_0 ein beliebiger fixierter Punkt der komplexen Ebene.

a) Zeige, dass die Funktion $F(z) = \int_{\Gamma\, z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ komplex differenzierbar ist und $\frac{d}{dz}\, F(z) = f(z)$ gilt, wobei Γ eine beliebige Kurve von z_0 nach z ist.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(z) = z$.

Anleitung: benutze das Deformationsprinzip, um die Kurven zu Geraden zu machen. Dann lassen sich Differenzenquotienten von $F(z)$ leicht als Wegintegral darstellen.

Musterlösung:
a) Wähle ein beliebiges $\Delta z = h \in \mathbb{C}$. Es ergibt sich der Differenzenquotient $\dfrac{\Delta F}{\Delta z} = \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h}$, in dem sich

$$F(z+h) = \int_{\Gamma_1\, z_0}^{z+h} f(\xi)\, d\xi = \int_{\Gamma\, z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi + \int_{\Gamma_2\, z}^{z+h} f(\xi)\, d\xi = F(z) + \int_{\Gamma_2\, z}^{z+h} f(\xi)\, d\xi$$

zerlegen läßt: Γ_1 ist die Gerade von z_0 nach $z+h$, die sich in die Teilstücke Γ (die Gerade von z_0 nach z) und Γ_2 (die Gerade von z nach $z+h$) verbiegen und zerlegen läßt. Also:

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{\Gamma_2\, z}^{z+h} f(\xi)\, d\xi.$$

Parametrisiere die Gerade Γ_2 durch $\xi(t) = z + t \cdot h$, $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{z}^{z+h} {}_{\Gamma_2} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 f(z + t \cdot h) \cdot \underbrace{h}_{\frac{d\xi(t)}{dt}}\, dt = \int_0^1 f(z + t \cdot h)\, dt.$$

Damit ergibt sich ($f(z)$ ist als differenzierbare Funktion auch stetig):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z + t \cdot h)\, dt = \int_0^1 \lim_{h \to 0} f(z + t \cdot h)\, dt = \int_0^1 f(z)\, dt = f(z).$$

b) Wir wählen $z_0 = 0$. Mit der Parametrisierung $\xi(t) = t \cdot z$, $t \in [0,1]$ der Geraden vom Nullpunkt zum Punkt z erhält man die Stammfunktion

$$F(z) = \int_0^z {}_{\Gamma} \xi\, d\xi = \int_0^1 \underbrace{t \cdot z}_{\xi(t)} \cdot \underbrace{z}_{\frac{d\xi(t)}{dt}}\, dt = z^2 \cdot \int_0^1 dt = \frac{z^2}{2}.$$

(Diese Rechnung ist schon in Aufgabe 55.a) geschehen.)
