Mathe für Physiker III — Wintersemester 02/03
Walter Oevel — 28. 10. 2002

Ü b u n g s b l a t t 2

Abgabe von $*$ Aufgaben am 4.11.2002 in der Übung.

Aufgabe 7*: (Vollständige Orthonormalsysteme. 10 Bonuspunkte)
Sei $\{F_0, F_1, \ldots\}$ ein vollständiges Ortho<u>normal</u>system in einem Hilbertraum L. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle = \langle f, g\rangle$$

für alle $f, g \in L$. (Physiker schreiben dies auch als: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |F_k\rangle \cdot \langle F_k| = \text{Identität}$.)

Anleitung: betrachte $\displaystyle\langle f - \sum_{k=0}^{n} \langle F_k, f\rangle \cdot F_k,\ g - \sum_{j=0}^{n} \langle F_j, g\rangle \cdot F_j\rangle$.

Musterlösung:
Der Abstand zwischen $\langle f, g\rangle$ und $\sum_k \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle$ wird auf den Abstand zwischen f, g und den entsprechenden endlichen Fourier–Approximationen zurückgeführt:

$$\langle f - \sum_{k=0}^{n} \langle F_k, f\rangle \cdot F_k,\ g - \sum_{j=0}^{n} \langle F_j, g\rangle \cdot F_j\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f, g\rangle - \langle f,\ \textstyle\sum_j \langle F_j, g\rangle \cdot F_j\rangle - \langle \sum_k \langle F_k, f\rangle \cdot F_k,\ g\rangle + \langle \sum_k \langle F_k, f\rangle \cdot F_k,\ \sum_j \langle F_j, g\rangle \cdot F_j\rangle \\
&= \langle f, g\rangle - \textstyle\sum_j \langle F_j, g\rangle \cdot \langle f, F_j\rangle - \sum_k \overline{\langle F_k, f\rangle} \cdot \langle F_k, g\rangle + \sum_k \sum_j \overline{\langle F_k, f\rangle} \cdot \langle F_j, g\rangle \cdot \underbrace{\langle F_k, F_j\rangle}_{\delta_{kj}} \\
&= \langle f, g\rangle - \textstyle\sum_k \langle F_j, g\rangle \cdot \langle f, F_k\rangle - \sum_k \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle + \sum_k \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle \\
&= \langle f, g\rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle.
\end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$|\langle f, g\rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle f, F_k\rangle \cdot \langle F_k, g\rangle| \le \|f - \sum_{k=0}^{n} \langle F_k, f\rangle \cdot F_k\|_2 \cdot \|g - \sum_{k=0}^{n} \langle F_k, g\rangle \cdot F_k\|_2.$$

Wegen der Vollständigkeit konvergiert die rechte Seite gegen Null für $n \to \infty$.

Aufgabe 8*: (Gram–Schmidt–Orthogonalisierung. 10 Bonuspunkte)
Orthogonalisiere die Funktionen $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = e^{-2\cdot x}$, $f_2(x) = e^{-3\cdot x}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_0^{\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx$. (In MuPAD wird ∞ durch `infinity` dargestellt.)

Musterlösung:
Orthogonalisierung mit MuPAD:

```
2.5.0 > sp:= (f, g) -> int(f*g, x = 0..infinity):
2.5.0 > f0:= exp(-x): f1:= exp(-2*x): f2:= exp(-3*x):
2.5.0 > F0:= f0;

                              exp(-x)

2.5.0 > F1:= f1 - sp(F0, f1)/sp(F0,F0)*F0;

                                   2 exp(-x)
                      exp(-2 x) - ---------
                                       3

2.5.0 > F2:= f2 - sp(F0, f2)/sp(F0,F0)*F0 - sp(F1, f2)/sp(F1,F1)*F1

              3 exp(-x)   6 exp(-2 x)
              --------- - ----------- + exp(-3 x)
                 10           5
```

Probe:

```
2.5.0 > sp(F0, F1) , sp(F0, F2), sp(F1, F2)

                              0, 0, 0
```

Aufgabe 9*: (Bedingte Konvergenz einer speziellen Fourier–Reihe. 10 Bonuspunkte)
Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k}$ für alle $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ konvergiert. Für welche x konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \cdot x)}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k \cdot x)}{k}$?
Anleitung: Zeige zunächst: $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} = 1 - \frac{e^{i\cdot n\cdot x}}{n+1} + (1 - e^{-i\cdot x}) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k}$.

Musterlösung:
Mit der Partialbruchzerlegung $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - e^{-i\cdot x}\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot(k+1)\cdot x}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - e^{-i\cdot x}\cdot \sum_{k=2}^{n+1} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - e^{-i\cdot x}\cdot \Big(- e^{i\cdot x} + \frac{e^{i\cdot(n+1)\cdot x}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} + \Big(1 - e^{-i\cdot x}\cdot \frac{e^{i\cdot(n+1)\cdot x}}{n+1} - e^{-i\cdot x}\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k}\Big) \\
&= 1 - \frac{e^{i\cdot n\cdot x}}{n+1} + (1 - e^{-i\cdot x})\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k},
\end{aligned}$$

also für $x \neq 0, \pm 2\cdot\pi, \pm 4\cdot\pi$ etc:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} = -\frac{1 - \frac{e^{i\cdot n\cdot x}}{n+1}}{1 - e^{-i\cdot x}} \; + \; \frac{1}{1 - e^{-i\cdot x}}\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)}.$$

Die rechte Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e^{i\cdot k\cdot x}|}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} < \infty$$

und es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} = \frac{1}{1 - e^{-i\cdot x}}\cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k\cdot(k+1)} - 1\Big).$$

Damit konvergieren auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\cdot x)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot i}\cdot(e^{i\cdot k\cdot x} - e^{-i\cdot k\cdot x})}{k} = \frac{1}{2\cdot i}\cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\cdot k\cdot x}}{k}\Big)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\cdot x)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot(e^{i\cdot k\cdot x} + e^{-i\cdot k\cdot x})}{k} = \frac{1}{2}\cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot k\cdot x}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\cdot k\cdot x}}{k}\Big)$$

für alle $x \neq 0, \pm 2\cdot\pi, \pm 4\cdot\pi$ etc. Die Reihe über die sin-Terme konvergiert zusätzlich auch noch an diesen Punkten (gegen 0), also für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10: (MuPAD. 0 Bonuspunkte)

Lies die MuPAD–Hilfeseiten zu `assume` und `is`. Mit `?properties` wird man auf eine Übersichtsseite über die vordefinierten elementaren 'Eigenschaften' geführt.

a) Gib dem Bezeichner `k` die Eigenschaft, eine ganze Zahl zu sein. Vereinfache (`simplify`) den Ausdruck `sin((2*k + 3/5)*PI) - cos(k*PI)`.

b) Versuche, $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot e^{i \cdot k \cdot x}\, dx$ über `int(x*exp(I*k*x), x = -PI .. PI)` als symbolischen Ausdruck in `k` zu ermitteln. Gib `k` die Eigenschaft, ungleich 0 zu sein, und versuche es noch einmal. Gib `k` die Eigenschaft, eine ganze Zahl zu sein, und vereinfache den vom Integrierer gelieferten Ausdruck.

Musterlösung:

a)

```
2.5.0 > assume(k, Type::Integer):
2.5.0 > simplify( sin((2*k + 3/5)*PI) - cos(k*PI));

                       1/2   1/2      1/2
              k + 1   2     (5    + 5)
          (-1)      + ------------------
                               4
```

b) Ohne eine Annahme an `k` weigert der Integrierer sich, ein explizites Ergebnis zu berechnen. Nach dem Annahme `k <> 0` wird das Integral berechnet und mittels `simplify` vereinfacht. Das Symbol % bezieht sich auf den zuletzt berechneten Ausdruck:

```
2.5.0 > int(x*exp(I*k*x), x = -PI .. PI)

                      PI
                       /
                      |
                      |  x exp(I k x) dx
                     /
                     -PI

2.5.0 > assume(k <> 0):
2.5.0 > int(x*exp(I*k*x), x = -PI .. PI)

cos(PI k) + I sin(PI k) - I PI k cos(PI k) + PI k sin(PI k)
----------------------------------------------------------- -
                              2
                             k

   cos(PI k) - I sin(PI k) + I PI k cos(PI k) + PI k sin(PI k)
   -----------------------------------------------------------
                                 2
```

```
                              k

2.5.0 > simplify(%)

              2 I sin(PI k) - 2 I PI k cos(PI k)
              ----------------------------------
                                2
                               k
```

Dies erklärt, warum die Eigenschaft `k <> 0` nötig war, diesen Ausdruck zu berechnen (dieser Ausdruck macht für `k = 0` keinen Sinn). Für ganzzahlige Werte von `k` ergibt sich eine weitere Vereinfachung. Das Symbol %2 bezieht sich auf den vorletzten Ausdruck:

```
2.5.0 > assume(k, Type::Integer):
2.5.0 > simplify(%2)
                                k
                      2 I (-1)  PI
                    - ------------
                              k
```

Aufgabe 11*: (Einige Fourier–Reihen. 10 Bonuspunkte)

Bestimme die Fourier–Reihen bzgl. der trigonometrischen Funktionen für die folgenden auf $(-\pi, \pi]$ definierten Funktionen:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = x \ , \qquad c) \quad f(x) = \pi - |x|.$$

Beachte Bemerkung 1.29 des Skripts.

Musterlösung:

a) Die Funktion ist ungerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den sin–Termen bestimmt werden:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(k \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \Big[-\frac{\cos(k \cdot x)}{k} \Big]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{4}{k \cdot \pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ergebnis:

$$f(x) \ \sim \ \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} + \frac{\sin(7 \cdot x)}{7} + \cdots \Big).$$

b) Die Funktion ist wieder ungerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den sin–Termen bestimmt werden:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

Aus Bequemlichkeit wird MuPAD zum Integrieren benutzt. Wir verfahren Aufgabe 10 folgend:

```
2.5.0 > assume(k <> 0):
2.5.0 > b[k]:= 2/PI*int(x*sin(k*x), x = 0..PI)

                  / sin(PI k)   PI cos(PI k) \
                2 | --------- - ------------ |
                  |     2            k       |
                  \    k                     /
                -----------------------------
                             PI

2.5.0 > assume(k, Type::Integer)
2.5.0 > simplify(b[k])
                                   k + 1
                            2 (-1)
                            -----------
                                 k
```

Ergebnis:

$$f(x) \;\sim\; 2 \cdot \left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \frac{\sin(4 \cdot x)}{4} \pm \cdots \right)$$

c) Die Funktion ist gerade, also brauchen nur die Koeffizienten vor den cos–Termen bestimmt werden:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

Aus Bequemlichkeit wird MuPAD zum Integrieren benutzt. Wir verfahren Aufgabe 10 folgend:

```
2.5.0 > assume(k <> 0):
2.5.0 > a[k]:= 2/PI*int((PI - x)*cos(k*x), x = 0..PI)

                        / cos(PI k)    1 \
                      2 | --------- - -- |
                        |     2        2 |
                        \    k        k  /
                    - --------------------
                              PI

2.5.0 > assume(k, Type::Integer)
2.5.0 > simplify(a[k])
                                     k
                            2 ((-1)  - 1)
                          - -------------
                                      2
                                PI k
```

Zusätzlich a_0:

```
2.5.0 > a[0]:= 1/PI*int(PI - x, x = 0..PI)

                              PI
                              --
                               2
```

Ergebnis:

$$f(x) \;\sim\; \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots\Big).$$

Anmerkung: nach Beispiel 1.30.b) des Skripts gilt

$$|x| \;\sim\; \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots\Big).$$

Hiermit folgt sofort

$$\pi - |x| \;\sim\; \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \Big(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \cdots\Big).$$

Aufgabe 12: (Fourier–Entwicklung einer singulären Funktion. 0 Bonuspunkte)
Betrachte die Funktion $f(x) = -\ln(2 \cdot \sin(\frac{|x|}{2}))$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

a) Plotte $f(x)$.

b) Zeige: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty$. Anleitung: es geht nur um die Singularität bei $x = 0$. Für $|x| \ll 1$ setze $\sin(|x|/2) \approx |x|/2$ und betrachte $\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} (-\ln(x)) \, dx$ mit $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \ll 1$.

c) Verwende MuPADs `numeric::int` um numerische Approximationen der Fourier–Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx$$

für $k = 0, \ldots, 10$ zu berechnen. Stelle eine Vermutung über den exakten Wert von a_k auf.

d) Versuche, die Fourier–Koeffizienten von f exakt zu berechnen. (MuPAD schafft die symbolischen Integrale nicht. Per Hand: partielle Integration, um den Logarithmus verschwinden zu lassen).

e) Betrachte die in c) + d) vermutete/berechnete Fourier–Reihe und vergleiche mit Aufgabe 9).

Vorsicht: d) ist ausgesprochen kniffelig. Man braucht etliche trigonometrische Identitäten.

Musterlösung:
a) Die Funktion ist gerade und hat eine Singularität bei $x = 0$:

```
2.5.0 > f:= -ln(2*sin(abs(x)/2)):
2.5.0 > plotfunc2d(f, x = -PI..PI)
```

b) Wegen $f(-x) = f(x)$ betrachten wir nur noch $x > 0$. Es gilt $f(x) \approx -\ln(x) > 0$ für $0 < x \ll 1$ und

```
2.5.0 > int(-ln(x), x = eps1 .. eps2);

                -eps2 ln(eps2) + eps2 + eps1 ln(eps1) - eps1
```

Für festes $\epsilon_2 \ll 1$ existiert mit

$$\lim_{\epsilon_1 \to 0} (\epsilon_1 \cdot \ln(\epsilon_1)) = 0$$

das folgende Integral:

$$\int_0^{\epsilon_2} f(x)\, dx \approx \int_0^{\epsilon_2} -\ln(x)\, dx = \epsilon_2 - \epsilon_2 \cdot \ln(\epsilon_2) < \infty.$$

c) Da die Funktion gerade ist, brauchen nur die Koeffizienten a_k vor den cos-Termen der Fourier–Reihe berechnet werden.

```
2.5.0 > for k from 0 to 10 do
2.5.0 >   print(k, float(2/PI)*numeric::int(f*cos(k*x), x = 0..PI))
2.5.0 > end_for:
                     0, 6.902245402e-20
                     1, 0.9999999999
                     2, 0.5
                     3, 0.3333333333
                     4, 0.25
                     5, 0.2
                     6, 0.1666666667
                     7, 0.1428571428
                     8, 0.125
                     9, 0.1111111111
                    10, 0.09999999999
```

Diese Werte legen die Vermutung nahe:

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{1}{k} \quad (k > 0).$$

d) Partielle Integration für $k \neq 0$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[f(x) \cdot \frac{\sin(k \cdot x)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \frac{\sin(k \cdot x)}{k}\, dx.$$

Der Randterm verschwindet für $x = \pi$ und auch für $x = 0$ (beachte $\sin(k \cdot x)/k \approx x$ und $x \cdot f(x) \approx x \cdot (-\ln(x)) \to 0$ für $x \to 0$). Damit ergibt sich

$$a_k = -\frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^\pi f'(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

$$\overset{(x/2 \to y)}{=} \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot y)\, dy.$$

Verblüffenderweise hängt das verbleibende Integral gar nicht von k ab. Beobachtung: es gilt

$$\frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot y)\, dy. = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2 \cdot k + 1) \cdot y) + \sin((2 \cdot k - 1) \cdot y)}{\sin(y)}\, dy.$$

Mit

$$\frac{\sin((2 \cdot k + 1) \cdot y)}{\sin(y)} = 1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \cos(2 \cdot j \cdot y)$$

folgt:

$$a_k = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \Big(1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \cos(2 \cdot j \cdot y) + 1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \cos(2 \cdot j \cdot y)\Big)\, dy$$

$$= \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \Big(2 + 4 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \cos(2 \cdot j \cdot y) + 2 \cdot \cos(2 \cdot k \cdot y)\Big)\, dy.$$

Die Stammfunktionen $(const\cdot)\sin(2 \cdot j \cdot y)$ von $\cos(2 \cdot j \cdot y)$ verschwinden, wenn sie an den Grenzen $y = 0$ und $y = \pi/2$ ausgewertet werden. Damit verschwinden alle Integrale bis auf den Beitrag der 2:

$$a_k = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi/2} 2\, dy = \frac{1}{k}.$$

Der Koeffizient a_0 ist noch trickreicher und wir verzichten hier auf eine analytische Betrachtung. Durch Nachschlagen z.B. im Bronstein findet man:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \Big(-\ln\Big(2 \cdot \sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\Big)\, dx = 0.$$

Anmerkung: Maple schafft a_0:

```
    |\^/|     Maple 7 (IBM INTEL LINUX)
._|\|   |/|_. Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc.
 \  MAPLE  /  All rights reserved. Maple is a registered trademark of
 <____ ____>  Waterloo Maple Inc.
      |       Type ? for help.
> int(ln(2*sin(x/2)), x);
                                   2
                   I (1 - exp(I x) )
-I ln(exp(I x)) ln(-----------------) - I dilog(exp(I x)) + I dilog(exp(I x) + 1)
```

```
                        exp(I x)

                                                                      2
     + I ln(exp(I x)) ln(exp(I x) + 1) - 1/2 I ln(exp(I x))

> int(ln(2*sin(x/2)), x = 0..Pi);
                                          0
```